

RP1 – zadania z kolokwiów

MB

Spis treści

1	Prawdopodobieństwo warunkowe i wzór Bayesa	1
2	Prawdopodobieństwo geometryczne	3
3	Gęstość, dystrybuanta, rozkład	3
3.1	Obliczeniowe	3
3.2	Rozkład jednostajny	6
3.3	Z treścią	7
4	Wartość oczekiwana, wariancja, kowariancja	7
5	Lemat Borela-Cantellego i podobne	9
6	Różne	10

1 Prawdopodobieństwo warunkowe i wzór Bayesa

Zadanie 1. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeżeli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, jednak również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów – dzieje się tak z prawdopodobieństwem 0,1. Jasio popełnił w teście 6 błędów.

Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 6 błędów?

Zadanie 2. Pan X. uczestniczy w turnieju pokera, w którym rozgrywa N partii z różnymi przeciwnikami. Dwóch z przeciwników to szulerzy. Podczas gry z uczciwym przeciwnikiem pan X. wygrywa z prawdopodobieństwem $1/2$, podczas gry z szulerem wygrywa z prawdopodobieństwem p . Okazało się, że pan X. przegrał dokładnie k partii.

Obliczyć prawdopodobieństwo, że pan X. przegrał z dokładnie jednym szulerem. Przyjmujemy, że wyniki poszczególnych partii są niezależne.

Zadanie 3. W turnieju pokera startuje 2^n graczy. Wśród nich są: Pan X. oraz jeden szuler o nieznanym tożsamości (wszyscy inni gracze, w tym pan X., są uczciwi). Zawody odbywają się systemem pucharowym, przegrywający odpada, wygrywający przechodzi do kolejnej rundy. W grze dwóch uczciwych graczy każdy ma taką samą szansę na wygraną, w grze uczciwego gracza z szulerem szuler wygrywa z prawdopodobieństwem p . Jakie jest

prawdopodobieństwo, że pan X wygra zawody?

Zadanie 4. W mieście X. 10% dorosłych mieszkańców ma małe dzieci. Prawdopodobieństwo, że osoba nie posiadająca małego dziecka nie zmrzeje w nocy oka wynosi 0.05, podczas gdy dla rodzica małego dziecka jest to 0.95. Wylosowano dorosłą osobę z miasta X. i okazało się, że w ciągu ostatnich 10 nocy udało jej się zasnąć dokładnie 3 razy. Jakie jest prawdopodobieństwo (warunkowe), że tej osobie kolejnej nocy uda się zasnąć?

Zadanie 5. W pudełku są (nierozróżnialne przed otwarciem) cztery losy pierwszego typu i cztery losy drugiego typu. Los pierwszego typu oznacza wygraną 2 zł, los drugiego typu daje zaś graczowi prawo do rzutu symetryczną monetą: jeśli na monecie wypadnie orzeł, gracz otrzyma 1 zł, a jeśli wypadnie reszka, to gracz nic nie dostanie. Zdarzenie losowe A polega na tym, że z pudełka wyciągnięto bez zwracania pięć losów i po ich otwarciu gracze w sumie otrzymali dokładnie 6 złotych.

Wyznaczyć prawdopodobieństwo (warunkowe) tego, że wśród wyciągniętych losów było mniej losów pierwszego typu niż losów drugiego typu, pod warunkiem, że zaszło zdarzenie A .

Uwaga: W tym zadaniu można nie upraszczać do końca wyniku liczbowego.

Zadanie 6. Na planecie Ksi odbywa się bal. Uczestniczy w nim nieznana liczba par kosmitów. Prawdopodobieństwo, że par jest dokładnie n wynosi $\frac{8^n}{n!(e^8-1)}$, dla $n = 1, 2, \dots$. W ramach zabawy uczestnicy rozdzielają się, a następnie ponownie łączą się w pary w sposób całkowicie losowy (każdy podział na pary zbioru $2n$ uczestników jest tak samo prawdopodobny). Okazało się, że kosmici połączyli się w pary w takiej samej konfiguracji jak na początku.

Obliczyć prawdopodobieństwo (warunkowe), że w balu uczestniczy dokładnie m par kosmitów.

Wskazówka: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right)$.

Zadanie 7. Przed rokiem 2019 każda paczka żelków zawierała 40% żelków czerwonych, 40% zielonych i 20% żółtych. W 2019 wprowadzono nowy kolor, niebieski, i teraz każda paczka zawiera po 25% żelków każdego koloru.

- (a) Mamy dwie paczki żelków, jedną starą i jedną nową. Wyciągamy po jednym żelku z każdej paczki, okazuje się, że wyciągnęliśmy czerwonego i żółtego (ale nie zwróciliśmy uwagi, który pochodził z której paczki). Jaka jest szansa, że żółty pochodzi ze starej paczki?
- (b) Pan X. otrzymał 10 paczek żelków, z których 2 były nowe, pozostałe stare. Ustawił je w losowej kolejności i wyjmował z nich po kolei po jednym żelku. Żelki wyciągnięte z paczek o numerach od 1 do 8 były czerwone, zielone lub żółte, a żelek wyciągnięty z paczki o numerze 9 był niebieski. Jakie jest prawdopodobieństwo, że paczka z numerem 10 jest nowa?

Zadanie 8. W urnie znajduje się 5 kul amarantowych, 7 kul białych i 8 kul czarnych. Losujemy trzykrotnie po jednej kuli bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że

- (a) wszystkie wylosowane kule są tego samego koloru;

- (b) wszystkie wylosowane kule są tego samego koloru, jeśli wiadomo, że druga wylosowana kula jest biała;
- (c) druga wylosowana kula jest biała, jeśli wiadomo, że wszystkie wylosowane kule są tego samego koloru.

Zadanie 9. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych, przy czym $b, c \geq 1$. Losujemy ze zwracaniem kule z urny do momentu wyciągnięcia trzeci raz kuli białej lub czwarty raz kuli czarnej (łącznie, niekoniecznie pod rząd).

- (a) Wyznaczyć rozkład liczby wykonanych losowań.
- (b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w pierwszych 4 losowaniach wyciągnęliśmy dokładnie 2 razy kulę białą, jeśli wiadomo, że wykonaliśmy łącznie dokładnie 6 losowań.
- (c) W przypadku, gdy $b = 2c$, wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w pierwszych 4 losowaniach wyciągnęliśmy dokładnie 2 razy kulę białą, jeśli wiadomo, że zakończyliśmy losowanie, wyciągając czwartą kulę czarną.

2 Prawdopodobieństwo geometryczne

Zadanie 10. Wylosowano punkt X z trójkąta równobocznego ABC (zgodnie z prawdopodobieństwem geometrycznym). Oznaczmy przez O punkt przecięcia środkowych tego trójkąta. Obliczyć prawdopodobieństwo, że długość odcinka OX jest mniejsza niż długość każdego z odcinków AX , BX , CX .

Zadanie 11. Dany jest kwadrat o boku długości 1. Na brzegu tego kwadratu wybrano losowo dwa punkty. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że są one odległe o więcej niż 1.

Zadanie 12. Z kwadratu $ABCD$ losujemy punkt X , zgodnie z prawdopodobieństwem geometrycznym. Obliczyć:

- (a) prawdopodobieństwo tego, że kąt AXB jest rozwarty;
- (b) prawdopodobieństwo tego, że kąt AXB jest rozwarty, jeśli wiadomo, że kąt BXC jest rozwarty.

3 Gęstość, dystrybuanta, rozkład

3.1 Obliczeniowe

Zadanie 13. Dla $a > 0, \lambda \geq 0$ niech funkcja $g_{a,\lambda}: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ będzie zadana wzorem

$$g_{a,\lambda}(x) = ae^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x).$$

- (a) Wyznaczyć wszystkie pary (a, λ) dla których $g_{a,\lambda}$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej X .
- (b) Dla a, λ z punktu (a) wyznaczyć dystrybuantę zmiennej X .

(c) Dla jakich wartości parametrów a, λ zmienne X oraz $1 - X$ mają ten sam rozkład?

Zadanie 14. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$g(x, y) = Cx^2y^2 \cdot \mathbb{1}_{\{0 < x < y < 1\}}.$$

(a) Wyznaczyć stałą C .

(b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej X .

Zadanie 15. (S:K2020) Wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$g(x, y) = \begin{cases} Ce^{-y}, & \text{gd}y\ 0 \leq x \leq y, \\ 0, & \text{wpp}, \end{cases}$$

gdzie C jest pewną liczbą rzeczywistą.

(a) Znajdź rozkłady zmiennych losowych $X, Y, Y/X$. Jeśli mają gęstości – znajdź je.

(b) Oblicz kowariancję zmiennych X i Y .

Zadanie 16. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g_X(x) = \frac{1}{2} \sin(x) \cdot \mathbb{1}_{[0, \pi]}(x).$$

Wyznacz $\mathbb{P}(\sin(X) \leq \frac{1}{2})$ oraz wyznacz rozkład zmiennej losowej $\max\{\sin(X), \frac{1}{2}\}$.

Zadanie 17. Zmienna X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{9}x^2 \cdot \mathbb{1}_{[0, 3]}(x).$$

(a) Wyznaczyć $\mathbb{P}([X] = 0 | [X] \leq 1)$.

(b) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $Y = X^3$.

Uwaga: Dla $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

Zadanie 18. Załóżmy, że wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$g(x, y) = \begin{cases} Cy^{-5} & \text{dla } 1 < x < y, \\ 0 & \text{wpp}. \end{cases}$$

Oblicz stałą C . Znajdź rozkład zmiennej losowej Y oraz rozkład zmiennej losowej $\frac{Y}{X}$. Jeśli rozkłady te mają gęstości – podaj je.

Zadanie 19. Zmienna losowa X ma gęstość

$$g(x) = Cx^{-2} \cdot \mathbb{1}_{[1, 6]}(x),$$

gdzie C jest stałą.

(a) Wyznaczyć C .

(b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Z = \max\{X, \frac{1}{3}X^2\}$.

(c) Czy Z ma rozkład ciągły? Jeśli tak, wyznaczyć gęstość.

Zadanie 20. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = Ce^{-x} \cdot \mathbb{1}_{\{|y| \leq x\}}.$$

(a) Wyznaczyć C .

(b) Wyznaczyć rozkład zmiennej Y/X .

(c) Czy zmienne Y/X oraz X są niezależne?

Zadanie 21. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{3}{2}x^2 \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

(a) Wyznaczyć $\mathbb{P}(X^2 \geq \frac{1}{2} | X < 0,9)$.

(b) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $Y = 1/X$.

Zadanie 22. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos(x) \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x).$$

Wyznacz $\mathbb{P}(4X^2 \geq \pi X)$ oraz wyznacz rozkład zmiennej losowej $\min\{X, 1\}$.

Zadanie 23. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = e^x \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq x \leq 1\}}.$$

(a) Wyznaczyć rozkład zmiennej Y/X .

(b) Czy zmienne $X, Y/X$ są niezależne?

Zadanie 24. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{2}{x^3} \cdot \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x).$$

(a) Obliczyć $\mathbb{E}X \cdot \mathbb{1}_{\{|X| \leq 5\}}$.

(b) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej e^X .

Zadanie 25. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1.

(a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $\frac{X}{X+Y}$.

(b) Udowodnić, że zmienne $\frac{X}{X+Y}$ oraz $X+Y$ są niezależne.

Zadanie 26. Dany jest dwuwymiarowy wektor losowy (X, Y) o gęstości

$$g(x, y) = \frac{C}{\sqrt{x}} \cdot \mathbb{1}_{\{0 < y < 1\}} \cdot \mathbb{1}_{\{0 < x < \sqrt{y}\}}.$$

(a) Wyznaczyć C .

(b) Uzasadnić, że zmienna losowa Y jest całkowalna i obliczyć $\mathbb{E}[Y]$.

(c) Wyznaczyć gęstości zmiennych losowych $\frac{X^2}{Y}$ i Y lub uzasadnić, że nie mają gęstości.

(d) Rozstrzygnąć, czy zmienne losowe $\frac{X^2}{Y}$ i Y są niezależne.

3.2 Rozkład jednostajny

Zadanie 27. Losujemy punkt (X, Y) z trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$, zgodnie z prawdopodobieństwem geometrycznym. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $Z = X^2$. Czy Z ma gęstość? Jeśli tak, obliczyć ją, jeśli nie – uzasadnić.

Zadanie 28. Dany jest prostokąt o bokach długości a i b . Niech O oznacza środek symetrii prostokąta. Z brzegu prostokąta wybrano losowo dwa punkty, P i Q . Proste PO i QO dzielą prostokąt na rozłączne wielokąty. Niech X oznacza liczbę tych wielokątów, które są pięciokątami.

(a) Wyznaczyć rozkład zmiennej X .

(b) Wykazać, że $\mathbb{P}(X = 2) \geq \frac{1}{2}$.

Zadanie 29. Dwuwymiarowe wektory losowe $X = (X_1, X_2)$ i $Y = (Y_1, Y_2)$ są niezależne, a ponadto X ma rozkład jednostajny na kole $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$, Y zaś ma rozkład jednostajny na kole $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że X jest w odległości większej niż 1 od Y , tzn. $P((X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2 > 1)$.

Zadanie 30. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie o wierzchołkach $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$. Niech $Z = |X| + |Y|$.

(a) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej Z .

(b) Czy Z ma gęstość? Jeśli tak – wyznaczyć ją, w przeciwnym wypadku wykazać, że nie istnieje.

(c) Obliczyć $\mathbb{E}[Z]$.

(d) Czy zmienne X i Z są niezależne? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 31. Wektor (X, Y) ma rozkład jednostajny na zbiorze $|x - 1| + |y + 2| \leq 4$.

(a) Czy zmienna X ma gęstość? Jeśli tak, to ile ona wynosi?

(b) Oblicz $\mathbb{P}(X \geq Y + 1)$ oraz $\mathbb{P}(X > 0 | Y > 0)$.

Zadanie 32. Niech $a \geq b > 0$. Z prostokąta P o bokach długości a i b losujemy punkty $A_1, \dots, A_n$ (niezależnie, zgodnie z rozkładem jednostajnym na P). Niech D_i (dla $i = 1, \dots, n$) oznacza odległość A_i od brzegu prostokąta P . Niech dalej $X = \min\{D_1, \dots, D_n\}$ oraz $Y = \max\{D_1, \dots, D_n\}$.

(a) Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości zmiennych losowych X i Y .

(b) Obliczyć $\mathbb{P}(Y \leq \frac{a}{4} | X \geq \frac{b}{8})$.

3.3 Z treścią

Zadanie 33. Rzucamy n razy monetą, na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{4}$. Wszystkie rzuty są niezależne. Niech Z oznacza długość najdłuższego ciągu rozpoczynającego się i kończącego orłem. (Pomiędzy skrajnymi orłami mogą być reszki lub inne orły, dopuszczamy też sytuację, że ciąg jest jednoelementowy – złożony tylko z jednego orła.) $Z = 0$ jeśli są same reszki.

Znaleźć rozkład Z . Niech W oznacza długość początkowej serii reszek ($W = 0$, jeśli jako pierwszy wypadł orzeł.) Czy Z i W są niezależne?

Zadanie 34. W urnie znajduje się 100 ponumerowanych kul. Losujemy bez zwracania 25 spośród nich. Niech X oznacza największy wylosowany numer. Wyznacz rozkład X .

Zadanie 35. W urnie znajduje się 100 ponumerowanych kul. Losujemy bez zwracania 20 spośród nich. Niech X oznacza najmniejszy wylosowany numer. Wyznacz rozkład X .

Zadanie 36. Trzech hazardystów bierze udział w grze w wegańską wersję „rosyjskiej ruletki”. Gra składa się z następujących po sobie tur. Pierwszą turę rozpoczyna trzech graczy. Każdy z graczy rozpoczynających turę gry rzuca symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie mu szóstka, gracz odpada z gry, a jeśli inna liczba oczek – przechodzi do następnej tury gry. Gra kończy się, gdy odpadną z niej wszyscy gracze. Niech N oznacza liczbę graczy rozpoczynających ostatnią turę gry. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej N .

Zadanie 37. Z jednakowym prawdopodobieństwem uczestnik pewnej gry ma prawo do jednej, dwóch lub trzech prób. W każdej próbie, niezależnie od innych wyników, losowana jest liczba z przedziału $(0, 2)$, zgodnie z rozkładem jednostajnym. Wynik uczestnika (ozn. X) to największa z wylosowanych liczb. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X . Jeśli rozkład ten ma gęstość – wyznaczyć ją.

4 Wartość oczekiwana, wariancja, kowariancja

Zadanie 38. Z wnętrza trójkąta równobocznego ABC losujemy punkt D . Niech X oznacza najmniejsze z pól trójkątów ABD , BCD , CAD . Wyznaczyć rozkład X , jej wartość oczekiwaną i wariancję.

Zadanie 39. Kij o długości 1 złamano losowo w dwóch miejscach. Niech X oznacza długość najkrótszego z powstałych trzech kawałków. Wyznaczyć rozkład zmiennej X , jej wartość oczekiwaną i wariancję.

Zadanie 40. (S:K2020) Przy okrągłym stole jest $n + 3$ wolnych miejsc. Na spotkanie przychodzi $n + 3$ studentów, wśród nich Adam, Bartek i Cezary. Wszyscy studenci zajmują losowo miejsca przy stole, tak że każde rozsadzenie studentów jest równo prawdopodobne. Niech X oznacza liczbę osób, które siedzą pomiędzy Adamem i Bartkiem po tej stronie, po której nie siedzi Cezary. Oblicz $\mathbb{E}[X]$ oraz $\mathbf{Var}[X]$.

Zadanie 41. Przy okrągłym stole usadzono n osób ($n \geq 2$), każda otrzymała monetę o prawdopodobieństwie wyrzucenia orła równym p i wykonała jeden rzut (rzuty są niezależne). Niech N oznacza liczbę tych osób, które wyrzuciły orła, podczas gdy ich sąsiad z prawej strony wyrzucił reszkę. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej N .

Zadanie 42. Rzucamy prawidłową kostką aż do momentu, gdy wśród wyrzuconych liczb oczek znajdzie się czwórka oraz liczba podzielna przez 3. Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów.

(a) Wyznaczyć $\mathbb{P}(X \geq 10)$.

(b) Obliczyć $\mathbb{E}[X]$.

Zadanie 43. Rzucamy prawidłową kostką aż do momentu, gdy wyrzucimy piątkę i szóstkę (łącznie, niekoniecznie pod rząd). Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby rzutów.

Zadanie 44. (S:K2020) Niech wektor losowy (X, Y, Z) będzie rozkładem gaussowskim z parametrami $\mu = (1, 1, 1)$ oraz macierzą kowariancji

$$\text{Cov}(X, Y, Z) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 4 & 16 & -12 \\ -3 & -12 & 9 \end{bmatrix}.$$

Znajdź $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak, aby $V = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta$ miało rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$ oraz V było niezależne od Y i Z .

Zadanie 45. W urnie znajdują się 3 białe oraz 4 czarne kule. Losujemy kolejno kule z urny, przy czym jeżeli wyciągnęliśmy kulę czarną, to wrzucamy ją z powrotem do urny, a jeżeli kulę białą, to odkładamy ją na bok. Niech X oznacza numer losowania, po którym w urnie będą same czarne kule. Oblicz $\mathbb{E}[X]$.

Zadanie 46. Danych jest n listów i n zaadresowanych kopert. Wkładamy losowo listy do kopert, po jednym liście do każdej koperty. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty.

(a) Obliczyć $\mathbb{E}[X]$.

(b) Obliczyć $\text{Var}[X]$.

Zadanie 47. Powiemy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $a > 0$, jeśli X ma gęstość $g(x) = \frac{1}{a}e^{-x/a} \cdot \mathbb{1}_{\{x>0\}}$. Łatwo sprawdzić, że wówczas $\mathbb{E}[X] = a$.

Turystyka wędruje ze szczytu górskiego na przełęcz, przy czym czas przejścia tego odcinka ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 10 (minut). Na przełęczy turystka wybiera jedną z dwóch dróg do schroniska (z takim samym prawdopodobieństwem). Czas przejścia z przełęczy do schroniska pierwszą drogą ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1 minuta, a czas przejścia z przełęczy do schroniska drugą drogą ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2 minuty. Czas przejścia ze szczytu na przełęcz, wybór drogi na przełęczy oraz czas przejścia z przełęczy do schroniska są niezależne. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że turystka przejdzie drogę ze szczytu do schroniska w czasie poniżej 10 minut.

5 Lemat Borela-Cantellego i podobne

Zadanie 48. Z kwadratu o boku 1 losujemy w sposób niezależny punkty $X_1, X_2, \dots$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że istnieje nieskończenie wiele trójkątów równobocznych o wierzchołkach wśród punktów (X_i) .

Zadanie 49. Ustalmy $\alpha > 0$ i rozważmy następujący nieskończony ciąg doświadczeń. W n -tym doświadczeniu rzucamy monetą o prawdopodobieństwie wyrzucenia orła równym $1/n$, do momentu wyrzucenia pierwszego orła. Niech A_n oznacza zdarzenie „w n -tym doświadczeniu wykonano przynajmniej $\lfloor n^\alpha \rfloor$ rzutów”. Przy założeniu niezależności rzutów, obliczyć prawdopodobieństwo, że zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n ($\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x).

Zadanie 50. W urnie znajduje się jedna biała kula. Rozważmy następujący ciąg doświadczeń. W kroku m ($m = 1, 2, \dots$) eksperymentator losuje kulę z urny, zapisuje jej kolor, następnie zwraca ją do urny i dokłada m^b kul białych oraz m^c kul czarnych, gdzie b, c to ustalone nieujemne liczby całkowite. Losowania w kolejnych krokach są niezależne. Obliczyć prawdopodobieństwo, że kula biała zostanie wylosowana nieskończenie wiele razy.

Wskazówka: Dla $k \geq 0$, $\frac{1}{k+1}m^{k+1} \leq \sum_{i=1}^m i^k \leq m^{k+1}$.

Zadanie 51. Rozważmy następujący ciąg doświadczeń. W n -tym kroku, $n = 3, 4, 5, \dots$, mamy talię n kart z kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do n . Karty dokładnie mieszamy, a następnie kolejno odkrywamy wszystkie karty ustawiając je w rzędzie ("dokładnie mieszamy" - tzn. można założyć, że w pojedynczym doświadczeniu każde ustawienie kart jest jednakowo prawdopodobne oraz doświadczenia w krokach $n = 3, 4, 5, \dots$ są niezależne).

Niech A_n oznacza zdarzenie, że w n -tym doświadczeniu karty o największym i najmniejszym numerze (karty 1 i n) będą ze sobą sąsiadowały. Niech B_n oznacza zdarzenie, że w n -tym doświadczeniu karty o numerach 1, 2, 3 wystąpią na trzech kolejnych miejscach (choć niekoniecznie w tej kolejności). W następnym, $(n+1)$ -szym doświadczeniu dokładamy kartę o numerze $n+1$. Wszystkie karty dokładnie mieszamy, ponownie ustawiamy w rzędzie, itd.

- (a) Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzeń A_n i B_n .
- (b) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń A_n .
- (c) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń B_n .

Zadanie 52. Rozważmy następujący ciąg doświadczeń. W kroku n ($n = 1, 2, \dots$) eksperymentator rzuca monetą o prawdopodobieństwie wyrzucenia orła równym $1/n^a$, gdzie $a > 0$ jest ustalonym parametrem. Rzuty są niezależne. Dla $k = 1, 2, \dots$ obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu wyników pojawi się nieskończenie wiele serii złożonych z dokładnie k orłów, tzn. serii postaci $R \underbrace{O \cdots O}_k R$.

Zadanie 53. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X_k ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, k!]$. Niech $A_k = \{X_k > X_{k+1}\}$. Obliczyć praw-

dopodobieństwo, że zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń A_k .

6 Różne

Zadanie 54. Drużyna harcerska składa się z n druhów i n druhenek ($n \geq 2$), wśród nich są Bolek, Lolek i Tola. Podczas harców ustawiają się oni losowo w krąg, twarzami do środka kręgu (wszystkie ustawienia są równo prawdopodobne).

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że Bolek i Lolek będą stali obok siebie, pomiędzy dwiema druhenkami?
- (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że Bolek stoi dokładnie k miejsc na prawo od Lolka, natomiast Tola stoi o mniej niż k miejsc na prawo od Lolka?

Zadanie 55. Niech $b = (b_1, \dots, b_m)$ będzie losowo wybranym ciągiem o długości m o wyrazach ze zbioru $\{1, \dots, m\}$, gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą (wybór każdego z ciągów jest tak samo prawdopodobny). Obliczyć prawdopodobieństwo, że

- (a) w ciągu b występują co najmniej dwie jedyńki,
- (b) w ciągu b występują dokładnie dwie jedyńki, jeśli wiadomo, że w ciągu b występują co najmniej dwie jedyńki,
- (c) ciąg b jest niemalejący.

Zadanie 56. W finale turnieju bilardowego znalazło się dwóch graczy A i B . W pojedynczej grze każdy z graczy wygrywa z prawdopodobieństwem 50%, pojedynek trwa dopóki któryś z graczy nie zwycięży po raz piąty (łącznie, niekoniecznie pod rząd). W pierwszej grze zwyciężył gracz B . Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że

- (a) gracz B wygrał pojedynek,
- (b) w drugiej grze wygrał gracz A , jeśli pojedynek wygrał gracz B ,
- (c) rozegrano przynajmniej 8 gier (łącznie z pierwszą),
- (d) w drugiej grze wygrał gracz A , jeśli rozegrano przynajmniej 8 gier.

Zadanie 57. (S:K2020) Prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w każdym pojedynczym rzucie pewną monetą jest równe p . Zawsze, gdy nie wypada na niej orzeł, wypada reszka. Rzucamy tą monetą, aż do momentu, gdy po raz drugi wypadnie reszka (ta druga reszka, kończąca rzuty, nie musi wypaść natychmiast po wypadnięciu pierwszej reszki).

Proszę wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że wykonamy parzystą liczbę rzutów; wliczamy do nich również ostatni rzut – ten, w którym po raz drugi wypada reszka.

Zadanie 58. Gracze X, Y, Z rzucają kolejno i właśnie w tej kolejności prawidłową kostką. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że Y wyrzuci jedynekę zanim X wyrzuci szóstkę, a Z piątkę.

Zadanie 59. Gracze A, B, C rzucają kolejno i właśnie w tej kolejności prawidłową kostką. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że A wyrzuci szóstkę zanim B wyrzuci jedynkę, a C dwójkę.

Zadanie 60. (S:K2020) Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, n \geq 2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Niech $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Oblicz

$$\mathbb{P}(X_1 \leq S/2, X_2 \leq S/2, \dots, X_n \leq S/2).$$

Zadanie 61. Z przedziału $[-2, 2]$ losujemy kolejno liczby $a_1, a_2, \dots$, przy czym wybór każdej liczby jest niezależny od pozostałych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest rosnący.

Zadanie 62. Dana jest liczba naturalna $n \geq 4050$. Liczby $1, \dots, n$ przestawiono w losowy ciąg $c_1, \dots, c_n$.

- (a) Niech A_i oznacza zdarzenie $\{c_i \geq i\}, i = 1, \dots, n$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n$ oraz prawdopodobieństwo zdarzenia $A_{n-2} \cup A_{n-1} \cup A_n$.
- (b) Niech $B_{i,j}$ oznacza zdarzenie $\{c_i < c_j\}, i, j = 1, \dots, n$. Rozstrzygnąć, czy zdarzenia $B_{1,2}, B_{2,3}, B_{3,4}, \dots, B_{2024}, B_{2025}$ są niezależne.
- (c) Rozstrzygnąć, czy zdarzenia $B_{1,2}, B_{3,4}, B_{5,6}, \dots, B_{4049}, B_{4050}$ są niezależne.

Zadanie 63. Dany jest ciąg (ε_n) zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie $\mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = 1/2, n = 1, 2, \dots$, oraz ciąg (η_n) taki, że $\mathbb{P}(\eta_n \neq \varepsilon_n) = 1/n^2, n = 1, 2, \dots$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 ciąg

$$((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n) - (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n))$$

jest zbieżny.

Zadanie 64. Dany jest ciąg (X_n) takich zmiennych losowych, że zmienna X_n ma rozkład Poissona z parametrem $2n, n = 1, 2, \dots$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 ciąg (X_n) zbiega do nieskończoności.

Uwaga: *Być może przyda się wzór Stirlinga:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Zadanie 65. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są nieujemne, niezależne, mają takie same rozkłady oraz spełniają warunek $\mathbb{P}(X_n = 0) < 1, n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że prawie na pewno ciąg $(X_n X_{n+1} X_{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ nie jest zbieżny do 0.